

COMPENSAZIONE RIGOROSA DI ANGOLI OSSERVATI NELLA TRIANGOLAZIONE COL METODO DEI SETTORI

Dr. prof. GIOVANNI BOAGA

L'A. applicando il metodo dei minimi quadrati costruisce uno schema in base al quale riesce possibile eseguire rapidamente la compensazione rigorosa di angoli osservati col metodo dei settori, aggiunge una applicazione numerica e mette in rilievo la preferenza da darsi al metodo dei settori rispetto a quello ordinariamente usato delle combinazioni binarie, specialmente per stazioni di alta montagna.

Il metodo dei settori per la misura degli angoli, ordinariamente adoperato nella triangolazione svizzera, ed ideato circa trent'anni or sono dall'ing. H. Wild, è basato essenzialmente sul principio che segue: in ogni stazione centrale di una rete il giro d'orizzonte viene diviso in tre o quattro angoli (settori) possibilmente eguali; i settori vengono misurati direttamente più volte con posizioni diverse del cerchio, il numero delle osservazioni dipendendo dalla importanza della rete e dell'ordine della stazione.

Le semirette I, II, III, ... che limitano i settori si chiamano *direzioni principali*.

Le direzioni intermedie (*direzioni secondarie*) A, B, C, ... collocate in un settore ed osservate per reiterazione, sono collegate alle direzioni principali in modo che la somma degli angoli osservati in ciascuna zona formi l'angolo del settore.

Su ogni direzione secondaria si appoggiano due angoli (vedi fig. 1).

Allorchè la stazione è perimetrale non si completa il giro d'orizzonte; in questo caso essa risulta formata da uno o due settori soltanto.

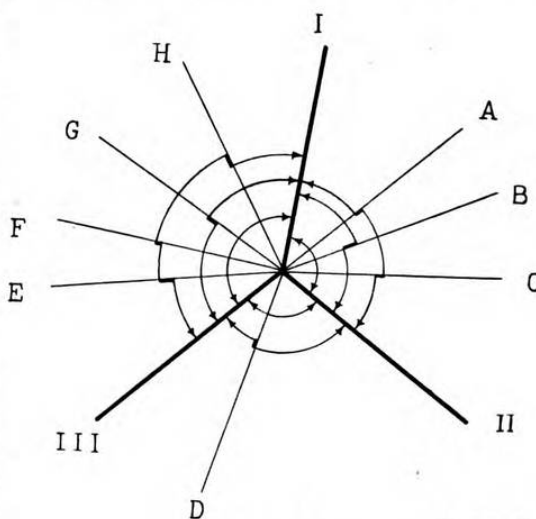


Figura 1.

RIV. CATASTO



Il numero degli angoli che si misurano con questo metodo, naturalmente inferiore a quello che si ottiene impiegando il *metodo delle combinazioni binarie* ideato dallo Schreiber (usato per la prima volta in Prussia nel 1878 e largamente impiegato nella triangolazione italiana) e la esattezza conseguita nelle triangolazioni svizzere di primo ordine (1) consigliano l'uso del metodo dei settori specialmente nelle stazioni di alta montagna, dove le buone condizioni atmosferiche sono di breve durata e dove ci sono ostacoli di ordine fisico alle volte difficilissimi a superare.

* * *

Particolarmente interessante può risultare la costruzione di uno *schema* in base al quale si possa eseguire rapidamente la compensazione rigorosa degli angoli osservati col metodo descritto.

Ci proponiamo pertanto, applicando il classico *metodo dei minimi quadrati* nel caso di combinazioni di osservazioni indirette condizionate, di stabilire le formule atte a fornire lo schema suddetto.

A tale uopo siano I, II, le *direzioni principali* di un settore appartenente ad una stazione perimetrale, ed, A, B, C, D (vedi fig. 2) le *direzioni secondarie*.

Indichiamo con λ_0 il valore dell'angolo del settore e con $\lambda_m^{(n)}$ i valori degli angoli delle zone, dove l'indice m indica il numero ordinale dell'angolo nel senso dell'andamento delle lancette di un orologio, e l'apice n la zona a cui esso appartiene.

In particolare per il caso della fig. 2 valgono le notazioni:

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= I \widehat{S} A & \lambda''_1 &= I \widehat{S} B \\ \lambda'_2 &= A \widehat{S} C & \lambda''_2 &= B \widehat{S} D \\ \lambda'_3 &= C \widehat{S} II & \lambda''_3 &= D \widehat{S} II. \end{aligned}$$

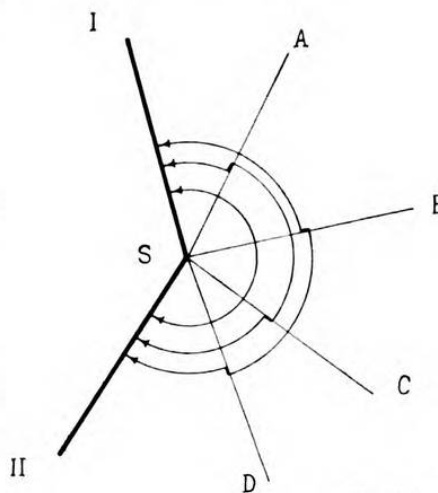
Analogamente indichiamo con i simboli:

a_0 e $a_m^{(n)}$ gli angoli osservati,
 p_0 e $p_m^{(n)}$ i rispettivi pesi,
 v_0 e $v_m^{(n)}$ i residui di osservazione.

Le quantità λ_0 , a_0 , v_0 sono legate dalla relazione

$$[I] \quad \lambda_0 = a_0 + v_0$$

di peso p_0 .



RIV. CATASTO

Figura 2.

(1) Cfr. H. ZOELLY, *La méthode des secteurs en triangulation*, « Revue technique des mensurations et améliorations foncières », Winterthur, 1925.



Similmente le $\lambda_m^{(n)}$, $\alpha_m^{(n)}$, $v_m^{(n)}$ sono legate da sei relazioni del tipo

$$[2] \quad \lambda_m^{(n)} = \alpha_m^{(n)} + v_m^{(n)} \dots \dots \begin{cases} m = \text{I}, 2, 3 \\ (n) = ', '' \end{cases}$$

di pesi rispettivi $p_m^{(n)}$.

Inoltre fra λ_0 e $\lambda_m^{(n)}$ intercedono le seguenti equazioni di condizione:

$$[3] \quad \begin{cases} \lambda_0 - \lambda'_1 - \lambda'_2 - \lambda'_3 = 0 \\ \lambda_0 - \lambda''_1 - \lambda''_2 - \lambda''_3 = 0. \end{cases}$$

Le [1], [2], [3], si debbono risolvere rispetto a λ_0 e $\lambda_m^{(n)}$ con la condizione che risulti minima la somma:

$$p_0 v_0^2 + \Sigma p_m^{(n)} \{v_m^{(n)}\}^2$$

Indicando come di consuetudine con k_1 e k_2 i correlativi, si perviene senza difficoltà, in base a procedimenti noti, al sistema:

$$[4] \quad \begin{cases} p_0 v_0 + k_1 + k_2 = 0 \\ p'_1 v'_1 - k_1 = 0 \\ p'_2 v'_2 - k_1 = 0 \\ p'_3 v'_3 - k_1 = 0 \\ p''_1 v''_1 - k_2 = 0 \\ p''_2 v''_2 - k_2 = 0 \\ p''_3 v''_3 - k_2 = 0 \end{cases}$$

che assieme alle [3] (dove si debbono intendere alle λ sostituiti i valori dati dalle [1] e [2]), costituisce un sistema lineare di nove equazioni a nove incognite: $v_0, v'_1, v'_2, v'_3, v''_1, v''_2, v''_3, k_1, k_2$.

Epperò, dividendo la seconda, terza e quarta equazione del sistema [4] rispettivamente per p'_1, p'_2, p'_3 , e sommando membro a membro le equazioni che così si ottengono, si perviene alla:

$$[5] \quad k_1 = \frac{[v]'}{\left[\frac{\mathbf{I}}{p}\right]'}$$

dove per semplicità di scrittura è stato posto:

$$[6] \quad [v]' = v'_1 + v'_2 + v'_3$$

$$[7] \quad \left[\frac{\mathbf{I}}{p}\right]' = \frac{\mathbf{I}}{p'_1} + \frac{\mathbf{I}}{p'_2} + \frac{\mathbf{I}}{p'_3}$$

In modo perfettamente analogo dalle ultime tre del sistema [4] si ricava:

$$[8] \quad k_2 = \frac{[v]''}{\left[\frac{\mathbf{I}}{p}\right]''}$$

con chiaro significato dei simboli adoperati.



Sostituendo le [5] e [8] nella prima delle [4], e tenendo conto in un primo tempo delle [1] e [2] e poi delle [3], si arriva alla:

$$[9] \quad p_0 \lambda_0 - p_0 a_0 + \frac{\lambda_0}{\left[\frac{1}{p}\right]'} - \frac{[a]'}{\left[\frac{1}{p}\right]'} + \frac{\lambda_0}{\left[\frac{1}{p}\right]''} - \frac{[a]''}{\left[\frac{1}{p}\right]''} = 0.$$

Si osservi ancora che il peso p' della somma $[a]' = a'_1 + a'_2 + a'_3$ i cui addendi hanno i pesi p'_1, p'_2, p'_3 è dato dalla

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} + \frac{1}{p'_3} = \left[\frac{1}{p}\right]'$$

pertanto

$$[10] \quad p' = \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]'}$$

ed analogamente

$$[11] \quad p'' = \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]''}$$

Con questa osservazione dalla [9] si trae per l'angolo compensato del settore l'importo:

$$[12] \quad \lambda_0 = \frac{p_0 a_0 + p' [a]' + p'' [a]''}{p_0 + p' + p''}$$

che corrisponde ovviamente alla *media ponderata* dei valori $a_0, [a]', [a]''$ del detto angolo.

Per calcolare i valori compensati degli *angoli intermedi* si osservi che al [5] può scriversi:

$$[13] \quad k_1 = \frac{v'_1 + v'_2 + v'_3}{\left[\frac{1}{p}\right]'} = (\lambda'_1 - a'_1 + \lambda'_2 - a'_2 + \lambda'_3 - a'_3) p' = \lambda_0 p' - [a]' p'$$

e tenendo conto di ciò, la seconda, terza e quarta delle [4] diventano:

$$[14] \quad p'_m (\lambda'_m - a'_m) = \{\lambda_0 - [a]'\} p'$$

con $m = 1, 2, 3$.

Esse danno la possibilità di determinare gli angoli intermedi λ'_m della prima zona. Risolvendole rispetto λ'_m si ricavano le:

$$[15] \quad \lambda'_m = a'_m + \{\lambda_0 - [a]'\} \frac{p'}{p'_m}$$

od anche, ponendo

$$[16] \quad w' = \lambda_0 - [a]'$$



e ricordando la [10]

$$[17] \quad \lambda'_m = a'_m + \frac{w' \cdot \frac{1}{p'_m}}{\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} + \frac{1}{p'_3}}$$

con $m = 1, 2, 3$.

Similmente operando su k_2 con le ultime tre delle [4], si ottengono per gli angoli intermedi della seconda zona delle formule analoghe alle [17].

Le formule [12] e [17] così stabilite, danno la seguente regola per la compensazione rigorosa delle osservazioni angolari eseguite col metodo dei settori, per stazioni nelle quali non è completo il giro d'orizzonte:

a) Il valore compensato dell'angolo del settore eguaglia la media ponderata dei valori risultanti dalle somme degli angoli delle singole zone e di quello direttamente osservato.

b) I valori compensati degli angoli intermedi appartenenti ad una zona si ottengono dai valori direttamente osservati corretti dai contributi che si ottengono dividendo in parti inversamente proporzionali ai pesi dei singoli angoli della zona considerata la differenza fra il valore del settore dianzi compensato e la somma degli angoli della zona.

* * *

Il procedimento seguito può estendersi senza difficoltà al caso di stazioni centrali, dove più settori formano il giro d'orizzonte. Si perviene così a tante equazioni del tipo [1] quanti sono i settori; a tante equazioni del tipo [2] quanti sono gli angoli delle varie zone dei singoli settori; a tante equazioni di condizione del tipo [3] quante sono le zone di tutti i settori. A queste inoltre si deve aggiungere la condizione che la somma degli angoli dei settori risulti eguale a 360° .

Risolvendo il sistema che così si ottiene si perviene a delle formule, che per brevità non si riportano, e che tradotte in linguaggio ordinario danno la seguente regola per la compensazione rigorosa in discorso:

a) Si calcolano mediante la [12] i valori medi ponderati degli angoli dei singoli settori.

b) L'errore di chiusura del giro d'orizzonte rispetto ai valori medi ponderati dianzi trovati, si ripartisce fra detti valori medi in parti inversamente proporzionali ai rispettivi pesi. Si ottengono con ciò i valori compensati degli angoli dei vari settori.

c) Si determinano gli angoli compensati intermedi apportando a ciascuno una correzione risultante dalla ripartizione in parti inversamente proporzionali ai rispettivi pesi della differenza fra il valore compensato del settore e la somma degli angoli della zona a cui appartengono gli angoli considerati.



Infine, applicando i noti principi del *metodo dei minimi quadrati* alla *determinazione dei pesi* di funzioni di quantità compensate si giunge, con procedimento piuttosto lungo, a delle formule che tradotte in linguaggio comune danno la regola:

a) *Il peso dell'angolo di un settore compensato si ottiene addizionando il peso della misura diretta e quelli risultanti dalla combinazione degli angoli intermedi, nonchè di quello risultante dalla compensazione di questo settore dopo la chiusura a quattro retti.*

b) *Il peso di un angolo intermedio compensato si ricava dal peso del medesimo angolo osservato, aumentato di un valore che si può considerare come il peso della differenza di due angoli aventi rispettivamente i pesi:*

1) *peso del settore compensato diminuito dal peso della somma degli angoli intermedi, nei quali è compreso l'angolo in discorso;*

2) *peso della somma degli angoli intermedi della zona corrispondente senza l'angolo in questione.*

* * *

La semplicità dei risultati ottenuti, per la compensazione rigorosa degli angoli sia per stazioni perimetrali, sia per stazioni centrali con settori che completano il giro d'orizzonte, permette dunque di effettuare sul terreno la compensazione stessa, e conseguentemente, con gli ordinari procedimenti, di determinare la precisione conseguita. In tal modo l'operatore prima di abbandonare la stazione si rende esatto conto dell'andamento delle operazioni.

Questo indubbiamente costituisce uno dei pregi fondamentali del metodo dei settori; anche per questo fatto esso è dunque consigliabile, ed in modo speciale, per stazioni di alta montagna, come si è accennato nell'introduzione.

APPLICAZIONE NUMERICA: — Per maggior intelligenza di quanto esposto crediamo opportuno far seguire una semplice applicazione numerica. Per questa ci serviremo di angoli da noi recentemente misurati a Padova allo scopo di eseguire una progettata triangolazione della detta città (1); più precisamente faremo uso degli angoli osservati dalla Specola dell'Istituto di Geodesia della R. Università con un teodolite Starke a microscopi micrometrici da 2" e col *metodo delle combinazioni binarie*.

Epperò per metterci nelle condizioni dianzi esposte non considereremo tutti i 15 differenti angoli osservati complessivamente collimando alle sei direzioni:

I) *Torre dell'acquedotto.* — Ponte Molino (Asse del parafulmine);

A) *Chiesa dell'Arcella.* (Asse del pilastrino che sorregge la statua di S. Antonio situata sulla cuspide del campanile);

B) *R. Scuola di Ingegneria.* (Asta eretta sul prolungamento dell'asse del pilastrino esistente sulla terrazza dell'Istituto di Topografia e Geodesia);

(1) Cfr. G. BOAGA, *Determinazione delle coordinate geografiche di alcuni punti della città di Padova*, Padova, Tip. del Seminario, 1933, Anno XI.



II) Chiesa dell'Istituto Esposti. - (Asse del campanile);

C) Chiesa di S. Giustina. (Asse del parafulmine eretto sul campanile maggiore);

D) R. Osservatorio Astronomico. (Asse della torre);

divideremo invece il *giro d'orizzonte* in due *settori*, comprendenti ciascuno due *zone* formate alla lor volta da due *angoli*, in modo da considerare soltanto 10 dei 15 angoli effettivamente osservati.

Con le notazioni introdotte precedentemente i *valori medi* degli angoli considerati, con i relativi *pesi* sono:

<i>Primo settore:</i>	Angolo del settore	(I, II) = $a_0 = 122^\circ 32' 31'', 3$	peso	4
	Prima zona	(I, A) = $a'_1 = 54 13 53, 3$		16
		(A, II) = $a'_2 = 68 18 29, 0$		6
	Seconda zona	(I, B) = $a''_1 = 102 24 12, 3$		6
		(B, II) = $a''_2 = 20 8 6, 9$		16
<i>Secondo settore:</i>	Angolo del settore	(II, I) = $a_0 = 237^\circ 27' 28'', 7$		4
	Prima zona	(II, C) = $a'_1 = 83 46 0, 6$		16
		(C, I) = $a'_2 = 153 41 25, 5$		2
	Seconda zona	(II, D) = $a''_1 = 144 29 17, 7$		6
		(D, I) = $a''_2 = 92 58 18, 6$		2

Con questi dati il *prospetto della compensazione* può essere così costruito:

Settore	Zona	Ampiezze angolari medie	peso p	$\frac{1}{p}$	Correzioni	Angoli compensati
I	I	$a'_1 = 54^\circ 13' 53'', 3$	16	0,062	+ 1, 22	54° 13' 54'', 52
		$a'_2 = 68 18 29, 0$	6	0,166	+ 3, 24	68 18 32, 24
		$[a]' = 122 32 22, 3$	4,37	0,228	+ 4, 46	122 32 26, 76
II	II	$a''_1 = 102 24 12, 3$	6	0,166	+ 5, 50	102 24 17, 80
		$a''_2 = 20 8 6, 9$	16	0,062	+ 2, 06	20 8 8, 96
		$[a]'' = 122 32 19, 2$	4,37	0,228	+ 7, 56	122 32 26, 76
		$a_0 = 122 32 31, 3$	4			
II	I	$a'_1 = 83 46 0, 6$	16	0,062	+ 0, 79	83 46 1, 39
		$a'_2 = 153 41 25, 5$	2	0,500	+ 6, 35	153 41 31, 85
		$[a]' = 237 27 26, 1$	1,78	0,562	+ 7, 14	237 27 33, 24



II	$a_1'' = 144$	29	17, 7	6	0,166	— 0, 76	144	29	16, 94
	$a_2'' = 92$	58	18, 6	2	0,500	— 2, 30	92	58	16, 30
	$[a]'' = 237$	27	36, 3	1,50	0,666	— 3, 06	237	27	33, 24
	$a_0 = 237$	27	28, 7	4					
I	$\lambda' = 122$	32	24,63	12,74	0,078	+ 2, 13	122	32	26, 76
II	$\lambda_0'' = 237$	27	29,62	7,28	0,137	+ 3, 62	237	22	33, 24
	$[\lambda] = 359$	59	54,25		0,215	+ 5, 75	360	00	00, 00
	$w =$		— 5,75						

Dal libretto delle osservazioni risulta poi indicando con v gli scostamenti fra i valori corretti ed i singoli valori osservati e per tutti gli angoli compensati:

$$[vv] = 1769,25$$

Con ciò, e tenendo conto che il numero totale di angoli misurati per i 10 angoli differenti è $n = 78$, il numero di angoli necessari è $n' = 5$, si ottengono i seguenti errori medi:

errore medio dell'unità di peso

$$M = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-n'}} = \pm 4'', 92 \text{ (1)}$$

errore medio di un angolo osservato

$$M' = \pm \sqrt{\frac{n'}{n}} \cdot M = \pm 1'', 30$$

errore medio di una direzione compensata

$$M'' = \pm \frac{M'}{\sqrt{2}} = \pm 0'', 92.$$

Ripetendo gli stessi calcoli per tutti i 15 differenti angoli misurati col metodo di Schreiber, essendo in questo caso 122 il numero totale di angoli misurati e $[vv] = 1779,41$, risultano successivamente, per i singoli errori medi, gli importi:

$$M = \pm 3'', 90; \quad M' = \pm 0'', 79; \quad M'' = \pm 0'', 57.$$

Dal confronto degli errori medi trovati con i due metodi risulta dunque manifesta la preferenza per il metodo dei settori, che riduce di molto il lavoro di osservazione, e conseguentemente quello di calcolo, specialmente per stazioni istituite in località dove le buone condizioni atmosferiche sono di breve durata.

(1) Da quanto detto in precedenza non risulta difficile il calcolo dei pesi degli angoli compensati e conseguentemente la determinazione degli errori medi di detti angoli compensati.

