SULLA VARIAZIONE DELLA DENSITÀ NELL'INTERNO DELLA TERRA

È noto che nella teoria relativa alle figure di equilibrio di una massa fluida eterogenea nella quale la densità cresce in modo continuo dalla superficie al centro, grande importanza dal punto di vista geo–fisico ha la classica equazione di Clairaut (1):

$$[1] \qquad a^3 \frac{d^2 e}{d\,a^2} \int_0^a \rho\, a^2\, d\,a + 2\, a^5 \rho \frac{d\,e}{d\,a} - 6\, e\, a \int_0^a \rho\, a^2\, d\,a + 2\, e\, a^4 \rho = 0$$

atta a dare la legge secondo cui varia lo schiacciamento dall'uno all'altro degli strati ellissoidici interni di egual densità e dove: a rappresenta la distanza dello strato considerato al centro del pianeta, e lo schiacciamento del detto strato e ρ la densità, funzione continua di a.

In particolare poi, la [1] serve a determinare la *figura esterna* del pianeta, stabilita che sia la funzione analitica di ρ, ossia l'*ipotesi relativa alla distribuzione della densità nell' interno della terra*.

Fra le numerose ipotesi escogitate per integrare la [1], degne di ricordo, sono quelle dovute a Roche (2), Lipschitz (3), Maurice Levy (4), Legendre (5), ecc.

In un precedente lavoro (6), considerando la [1], ecc., abbiamo dimostrato che adoperando l' ipotesi di Roche (anno 1855), definita dalla

$$\rho = \rho_0 (1 - k.\, a^2)$$

con ρ_0 *densità al centro* e k costante, quando si suppone uno schiacciamento che si avvicina a quello ormai ammesso per lo sferoide terrestre supposto di rotazione (7),

(1) Cnfr. Pizzetti P., *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*. Pisa, 1913. Cap. XII.
Tisserand F., *Traité de mécanique céleste*. Parigi, 1891. Tomo II, Cap. XIV e XV.
Ansel E. A., *Zur Theorie des irdischen Schwerefeldes*, Kap. 32, « Die Clairautsche Theorie » in Handbuch der Geophysik, Berlino, 1934, B. I., L. 3.

(2) *Memoires de l'Academie des Sciences de Montpellier*. Tomo III, 1855.

(3) Cnfr. *Journal de Crelle*. Tomo LXII.

(4) *Sur la théorie de la figure de la terre* (Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Tomo CVI).

(5) Tisserand F., *opera citata*, pag. 237.

(6) *Sull' ipotesi di Roche relativa alla distribuzione della densità nell' interno della terra*. « Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova », vol. XLIV.

(7) Per i grandi lavori geodetici eseguiti in varie epoche furono adoperati differenti *ellissoidi di riferimento*; così, per esempio, nell'ultimo secolo vennero adottati:

a) l'ellissoide di Delambre (1810) con il semiasse equatoriale $a = 6\,376\,985$ m. e lo schiacciamento $\alpha = \frac{1}{308{,}64}$;

b) l'ellissoide di Bessel (1837-1841) con $a = 6\,377\,397{,}15$ m., $\alpha = \frac{1}{299{,}15}$; [segue nota] la densità superficiale risultante si allontana da quella ordinariamente accettata [1].

Difatti in tale ricerca abbiamo trovato, supposta unitaria la distanza *a* dello strato superficiale al centro, i seguenti risultati:

DENSITÀ SUPERFICIALE	VALORE DELLA COSTANTE *k*	DENSITÀ AL CENTRO	INVERSO DELLO SCHIACCIAMENTO
2,2	0,791	10,57	297,0
2,3	0,780	10,48	294,9
2,4	0,763	10,26	292,2
2,5	0,753	10,14	290,5
2,6	0,740	10,00	288,7 [2]

In relazione a queste deduzioni numeriche, poichè fra le ipotesi dianzi nominate quella di Legendre può avere una giustificazione fisica considerando il grado di comprimibilità di un fluido – secondo la legge di Laplace [3] – abbiamo ritenuto interessante, ai fini geofisici, vedere con quale approssimazione detta ipotesi soddisfa alla densità media superficiale, ponendo a base dei calcoli i dati dell'ellissoide internazionale di Hayford.

In questa Nota brevemente riportiamo i risultati dei calcoli eseguiti.

c) l'ellissoide di Clarke (1880) con $a = 6\,378\,249{,}20$ m., $\alpha = \dfrac{1}{293{,}46}$;

d) l'ellissoide di Helmert (1907) con $a = 6\,378\,200$ m., $\alpha = \dfrac{1}{298{,}3}$.

Recentemente la seconda Assemblea generale dell'Associazione (allora Sezione) di Geodesia della Unione Geodetica e Geofisica Internazionale (Madrid, 1924) ha adottato per ellissoide di riferimento internazionale, quello calcolato da Hayford, avente le caratteristiche:

$$a = 6\,378\,388 \text{ m.} \quad \alpha = \frac{1}{297}.$$

I calcoli effettuati da Hayford (1909) si poggiano su 765 valori della deviazione della verticale, corretti per gli effetti topografici ed isostatici. Lo schiacciamento di Hayford fu adottato fin dal 1911 dalla «Conférence Internationale des Ephémérides Astronomiques» tenuta a Parigi in tale epoca.

Con *misure gravimetriche* si ottennero recentemente i seguenti schiacciamenti:

Helmert (1915) ...... 1 : 296,7

Bowie (1917) .... 1 : 297,4

Heiskanen (1928) .... 1 : 296,7.

[1] Si ammette generalmente che la densità delle roccie componenti la crosta terrestre si avvicini a 2,5. Il valore ammesso dai geodeti, specialmente nelle riduzioni delle misure di gravità, ecc., per la densità superficiale terrestre è però 2,67.

[2] Cnfr. anche TIERCY G., *De la densité superficielle moyenne de la terre* (Archives des Sciences physiques et naturelles, f. III, 1930) ed il trattato di WAVRE R., *Figures planetaires et géodesie*. Parigi, 1932. Ed. Gauthier-Villars et C. a pag. 125.

[3] Cnfr. PIZZETTI P., *opera citata*, pag. 219.

La funzione analitica di ρ stante le posizioni di Legendre si ricava come è risaputo dalla

$$[2] \qquad \frac{a^2 \frac{d\rho}{da}}{\int_0^a \rho\, a^2\, da} + m^2 = 0$$

con m valore costante (1).

Differenziando la [2], dividendo tutti i termini per a ed integrando si perviene alla (2)

$$[3] \qquad \rho = G \frac{\operatorname{sen}(m a)}{a}$$

con G costante arbitraria il cui valore sarà più avanti determinato.

In base alla [2] tenendo conto della [3] per l' integrale I del denominatore della [2] stessa, otteniamo le espressioni:

$$[4] \qquad \mathrm{I} = -\frac{a^2}{m^2}\frac{d\rho}{da} = \frac{G}{m^2}\left\{ \operatorname{sen}(m a) - m a \cos(m a) \right\}.$$

Indi, posto

$$[5] \qquad y = a^2 e \,.\, \int_0^a \rho\, a^2\, da$$

la prima si trasforma nella

$$[6] \qquad a \frac{d^2 y}{d a^2} - 4 \frac{d y}{d a} + m^2 a y = 0$$

che è soddisfatta dalla

$$[7] \qquad y = (P + Q a + R a^2) \cos(m a) + (P' + Q' a + R' a^2) \operatorname{sen}(m a)$$

se fra i parametri P, Q, R, P', Q', R', intercedono le quattro relazioni

$$[8] \qquad \begin{cases} Q + m P' = 0 \\ 6 R + 2 m Q' = 0 \\ Q' - m P = 0 \\ 6 R' - 2 m R = 0 \end{cases}$$

in quanto sostituendo la [7] in [6] si ottiene

$$\left\{ (4 Q + 4 m P') + (6 R + 2 m Q') a \right\} \cos(m a) + \left\{ (4 Q' - 4 m P) + (6 R' - 2 m Q) a \right\} \operatorname{sen}(m a) = 0.$$

(1) Cnfr. Pizzetti P., *opera citata*, pag. 214.

(2) Ibidem pag. 215.

Con ciò l' integrale della [6] è

$$y = P \left\{ \left(1 - \frac{m^2 a^2}{3}\right) \cos(m a) + m a \operatorname{sen}(m a) \right\}$$
$$+ P' \left\{ \left(1 - \frac{m^2 a^2}{3}\right) \operatorname{sen}(m a) - m a \cos(m a) \right\}$$

con P e P' costanti.

Imponendo allo schiacciamento e la condizione che al centro del pianeta esso rimanga finito, si trae $P = O$ (1), sicchè lo schiacciamento dei vari strati ellissoidici di egual densità nell' interno della terra, in funzione della profondità segue la seguente legge analitica :

$$[9] \qquad e = H \frac{(3 - m^2 a^2) \operatorname{sen}(m a) - 3 m a \cos(m a)}{m^2 a^2 \left\{ \operatorname{sen}(m a) - m a \cos(m a) \right\}}$$

con $H = P' m^3 : 3 G$, costante.

Alla superficie, cioè per $a = 1$ (asse polare), dovrà risultare (2)

$$[10] \qquad e\,|_{a=1} = e_1 \qquad 2 e_1 + \left(\frac{d e}{d a}\right)_1 = 5 \varphi$$

con φ rapporto tra la forza centrifuga equatoriale e la gravità corrispondente.

La seconda condizione, tenuto conto della [9] fornisce la

$$[11] \qquad \frac{(m - \operatorname{tang} m) \left\{ 3 m + (m^2 - 3) \operatorname{tang} m \right\}}{m^2 \left\{ m^2 + m \operatorname{tang} m + (m^2 - 2) \operatorname{tang}^2 m \right\}} = \frac{2 e_1}{5 \varphi}$$

che, noto il secondo membro, permette il calcolo della costante m.

Con i dati dell'ellissoide di Hayford 1/297 per lo schiacciamento, e

$$[12] \qquad \varphi = \frac{w^2 a}{g_e} = \frac{0.000\,000\,005\,317\,495 \times 637\,838\,800}{978{,}030} = \frac{1}{288{,}3}$$

(avendo attribuito alla gravità equatoriale g^e il valore adottato dalla Unione Geodetica e Geofisica Internazionale (Stoccolma, 1930)), si ottiene per il rapporto $R = e_1 : \frac{5}{2} \varphi$ il valore 0,388 215.

(1) Cnfr. PIZZETTI P., *opera citata*, pag. 216.

(2) IBIDEM, pag. 217.

Dalla [11] per $m = 142^\circ$, 144°, ecc., si traggono per R_i i seguenti importi:

i	m_i	R_i	*Diff. prime* Δ'	*Diff. sec.* Δ''
1	142°	0,392 437		
			— 0,003 710	
2	144	388 727		+ 0,000 093
			— 0,003 803	
3	146	384 924		+ 0,000 094
			— 0,003 897	
4	148	381 027		

Ne consegue, applicando la formula di Bessel per l'interpolazione (1)

$$[13] \qquad \eta = \frac{1}{\Delta'_i}\left(R - \frac{R_i + R_{i+1}}{2}\right) - \frac{\eta^2 - 0{,}25}{2} \cdot \frac{\Delta''_{i-1} + \Delta''_i}{2\,\Delta'_i}$$

e

$$[14] \qquad m = \frac{m_i + m_{i+2}}{2} + \eta\,(m_{i+1} - m_i)$$

ed eseguendo i calcoli:

$$[15] \qquad m = 144^\circ{,}269 = 144^\circ\,16'$$

ed in radianti

$$[16] \qquad m = 2{,}51\,796$$

L' integrale I dianzi definito, indicando con ρ_m la densità media terrestre diviene per $a = 1$

$$[17] \qquad I_s = \rho_m \int_0^1 a^2\, d\, a = \frac{1}{3}\,\rho_m$$

ed assunto per *densità media terrestre* il valore 5,56, come si trae dalla discussione delle misure eseguite con vari metodi da Baily, Jolly, ecc. (2)

$$[18] \qquad I_s = 1{,}853.$$

Con questo risultato la [4] permette il calcolo della costante G

$$[19] \qquad G = \frac{1{,}853 .\, m^2}{\operatorname{sen} m - m \cos m} = 4{,}47$$

In base alle [15], [16], [19] la *densità al centro* risulta data dalla

$$\rho_0 = m\,G = 11{,}25$$

(1) Cassinis G., *Calcoli numerici grafici e meccanici.* Pisa, 1928, pag. 146.

(2) Cnfr. Zanotti Bianco O., *Il problema meccanico della figura della terra.* Ed. Bocca, Torino (1885), vol. I, parte II, cap. III, pag. 121.

e *quella superficiale*

$$\rho_1 = G \text{ sen } m = 2{,}61$$

assai prossima a quella ordinariamente accettata 2,67.

Con i calcoli fatti si può ora ritrovare un altro dato geofisico: il rapporto $(Q - P)$: Q, con Q momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione e P quello rispetto ad un diametro equatoriale, ed il cui valore si trae dalla teoria meccanica della rotazione terrestre e della osservazione del fenomeno della precessione luni-solare.

Detto rapporto è definito, come è noto, dalla:

$$\frac{Q - P}{Q} = \frac{\int_0^1 \rho\, a^2\, d\, a}{\int_0^1 \rho\, a^4\, d\, a}$$

Il secondo integrale per la [3] diviene

$$\int_0^1 \rho\, a^4\, d\, a = G \int_0^1 a^3 \text{ sen } (m\, a)\, d\, a = G\, \frac{(6\, m - m^3) \cos m + (3\, m - 6) \text{ sen } m}{m^4}$$

mentre il primo, per quanto sappiamo, vale $\frac{1}{3}\, \rho\, m$.

Tenuto conto di questi risultati e dei dati numerici [15], [16], [19] si ricava

$$\frac{Q - P}{Q} = \frac{1}{305{,}0}$$

assai prossimo a quello generalmente adottato 1 : 305,6, ricavato dalle misure.

Con questi calcoli rimane dunque dimostrato che l' *ipotesi di Legendre, in base ai parametri del nuovo ellissoide internazionale di riferimento, riproduce con sufficiente approssimazione gli altri dati geo-fisici ordinariamente accettati e forniti dalle esperienze, quali densità terrestri media e superficiale,* ecc.

Per avere un criterio poi della variabilità del rapporto $(Q - P) : Q$ con lo schiacciamento e la densità superficiale, riproduciamo, come abbiamo fatto per l' ipotesi di Roche, il seguente specchio, di facile interpretazione.

INVERSO DELLO SCHIACCIAM.	COSTANTE m	DENSITÀ AL CENTRO	DENSITÀ ALLA SUPERFICIE	COSTANTE G	RAPPORTO $(Q - P) : Q$
289	138° 14′	10,55	2,92	4,37	295,0
291	139 50	10,73	2,82	4,39	297,6
293	141 20	10,90	2,77	4,42	300,1
295	142 47	11,07	2,69	4,44	302,6
297	144 16	11,25	2,61	4,47	305,0
299	145 31	11,41	2,54	4,49	307,6

dal quale risulta che con l' ipotesi di Legendre diminuendo lo schiacciamento diminuisce la densità superficiale avviandosi però – con riferimento all'ellissoide di Hayford – al valore generalmente adottato, mentre l'opposto si verifica per l' ipotesi di Roche.

Prima di chiudere, riportiamo, in ultima analisi, una tabellina comprendente i valori della densità interna terrestre a diverse profondità calcolate con l'*ipotesi di Roche*, con l'*ipotesi di Roche generalizzata*

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta a^2 + \gamma a^4)$$

con $\rho_0 = 10{,}84$ $\beta = 0{,}901$ e $\gamma = 0{,}127$, da noi considerata nel 1929 ed i cui coefficienti sono stati pure calcolati con i dati dell'ellissoide hayfordiano (¹) ed infine con quella di Legendre:

VALORE DI *a*	IPOTESI DI ROCHE	IPOTESI GENERALE DI ROCHE	IPOTESI DI LEGENDRE
1	2,20	2,45	2,61
0,9	3,79	3,83	3,81
0,8	5,22	5,15	5,05
0,7	6,47	6,39	6,27
0,6	7,56	7,51	7,44
0,5	8,48	8,49	8,51
0,4	9,23	9,32	9,45
0,3	9,82	9,97	10,22
0,2	10,23	10,45	10,78
0,1	10,49	10,74	11,14
0	10,57	10,84	11,25

Dal complesso di tutti questi calcoli risulta dunque che l' *ipotesi di Legendre si deve attualmente preferire – rispetto alle altre ipotesi sulla variazione della densità nell'interno della terra – in tutti quei problemi di indole geo–fisica in cui necessita l'impiego di una tale ipotesi, compatibile con i dati del nuovo ellissoide di riferimento ed altri dati geodetici e geo–fisici dedotti da misure dirette.*

G. BOAGA.

Pisa, Maggio 1937-XV.
Istituto di Topografia e Geodesia.
R. Università.

(¹) *Sopra una formula trinomia considerata come ipotesi relativa alla distribuzione della densità nell' interno della terra* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Tomo LXXXVIII, parte II, pag. 1399).

Detta formula fu poi da noi applicata all' interessante problema delle maree terrestri ed alla ricerca dei coefficienti della formula atta a dare la variazione della rigidità nell' interno della terra (Cnfr. « Atti del R. Istituto Veneto », tomo XC, parte II, pag. 597).